लेखकाविषयी :

प्रा. य. ना. वालावलकर

- Δ शासकीय अभियांत्रिकी महाविद्यालय, पुणे येथून अधिव्याख्याता (उपयोजित यंत्रशास्त्र) या पदावरून निवृत्त.
- Δ प्रसिद्ध झालेली काही पुस्तके –
  कोडी आणि करमणूक : भाग 1 ते 10
  सर्वांसाठी कोडी, सुविचार संग्रह,
  समानार्थी व विरुध्दार्थी शब्दकोश
- Δ रविवार सकाळ तसेच दैनिक सकाळमध्ये शब्दकोडे या सदराचे अनेक वर्षे लेखन
- Δ दैनिक सकाळच्या विज्ञान पुरवणीत 'तर्कक्रीडा' (गणिती आणि तार्किक कोडी) सदराचे 3 वर्षे लेखन



पुस्तिका क्र. 3

वाई तालुका गणित अध्यापक मंडळ, वाई

द्वारा : श्री. ना. शं. मोने, 1123, भाग्योदय, ब्राह्मणशाही, वाई–412 803



गणिती युक्तिवाद



लेखक : प्रा. य. ना. वालावलकर

अक्षरजुळणी
टाईप इनोव्हेटर्स,
195, सदाशिव पेठ, मोती चौक, सातारा
दूरध्वनी : (02162) 234372

मुद्रक
परशुराम प्रोसेस
34/8, एरंडवणा, गुळवणी महाराज पथ
पुणे - 411 004
दूरध्वनी : 25430891
25421344

संपादक
नागेश शंकर मोने

संपादन साह्य
श्री. सावंत अरुण, श्री. भुजबळ भगवान
सौ. जोशी अनुराधा

प्रकाशक
श्री. फरांदे दिनकर वि.
अध्यक्ष,
वाई तालुका गणित अध्यापक मंडळ, वाई

प्रकाशन वर्ष
नोव्हेंबर 2005

मुखपृष्ठ
अमृता वाळिंबे
मो-9822850507

लेखक
प्रा. य. ना. वालावलकर
B/13, सुयोगनगर, सेनापती बापट मार्ग, पुणे-16

मुद्रित शोधन
श्री. श्रीकृष्ण दीक्षित, वाई
दूरध्वनी : 221236

मूल्य रुपये - 15/-

गणिती युक्तिवाद

लेखक

प्रा. य. ना. वालवलकर

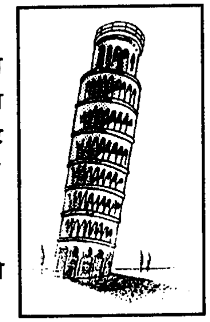
अनुक्रमणिका



1. दगड, विटा आणि गॅलिलिओ

उंच ठिकाणावरून खाली सोडलेली वस्तू गुरुत्वाकर्षण बलामुळे जमिनीकडे येते. तिला खाली यायला लागणारा वेळ हा तिच्या वजनावर अवलंबून नसतो. गॅलिलिओने पिसा येथील मनोऱ्यावरून एक मोठा आणि एक लहान असे दोन दगड खाली सोडून हे तत्त्व सप्रयोग सिद्ध केले, असे आपण विज्ञानाच्या पुस्तकात वाचतो.

गॅलिलिओने हा प्रयोग केला असेल तर तो लोकांच्या समाधानासाठी. आपल्या काही शिष्यांसमोर केवळ तर्कशुद्ध युक्तिवाद करून त्याने हे तत्त्व आधीच सिद्ध केले होते. तो युक्तिवाद असा :



''समजा मी पिसाच्या मनोऱ्यावर उभा आहे. माझ्या उजव्या हातात एक किलोग्रॅम वजनाची वीट आहे. तसेच डाव्या हातात एक किलोची वीट आहे. मी उजव्या हातातील वीट खाली सोडली. समजा, ती चार सेकंदांनी जमिनीवर पडली.''

''ठीक आहे. पुढे ?''

''आता मी डाव्या हातातील वीट सोडली. ती किती वेळाने जमिनीवर येईल ?''

''दोन्ही विटा सारख्याच वजनाच्या आहेत. त्या समान उंचीवरून सोडल्या. म्हणून दुसऱ्या विटेला चार सेकंदच लागतील.''

''आता समजा, मी दोन्ही हात हे असे थोडे जवळ घेतले. दोन विटांमध्ये दहा सेंटीमीटर फट ठेवून त्या एकाच वेळी सोडल्या. तर काय होईल ?''

''दोन विटांमधील क्षितिजसमांतर (Horizontal) अंतर किती, यावर काही अवलंबून नाही. दोन्ही विटा चार सेकंदांनीच जमिनीवर येतील.''

''तुम्ही आताच म्हणालात त्याप्रमाणे विटांमधील अंतर दहा सेमी ठेवले काय, दोन मिलीमीटर ठेवले काय किंवा त्या एकमेकींना चिकटून ठेवल्या काय, त्यांना खाली यायला चार सेकंदच वेळ लागेल ना ?''

''हो. निश्चितच.''



''अहो, एकमेकींना बिलगून एकाच वेळी खाली येणाऱ्या या एक एक किलोच्या दोन विटा म्हणजे दोन किलोंची एक वीट नव्हे काय ? वाटल्यास त्यांच्यामधे चुन्याचा पातळ थर देऊन त्या जोडल्या अशी कल्पना करा. म्हणजे एका किलोच्या विटेला जेवढा वेळ लागतो तेवढाच वेळ दोन किलो वजनाच्या विटेला लागतो. यावरून हा वेळ वस्तूच्या वजनावर (वस्तुमानावर) अवलंबून नसतो ! हे सिद्धच झाले की,''

''तसे बुद्धीला पटत, पण खरे वाटत नाही. जड वीट जोराने ओढली जाईल आणि लवकर खाली येईल, असे वाटत राहते.''

''मग पिसाच्या मनोऱ्यावर जा आणि प्रत्यक्ष करून पहा. तर्काने जे सिद्ध झाले, ते प्रयोगाने खरे ठरलेच पाहिजे.''

अशी ही सिद्धता. त्यासाठी पिसाचा मनोरा नको, दगड नको, विटा नकोत की वेळ मोजण्यासाठी घड्याळ नको. केवळ तर्कशुद्ध युक्तिवाद पुरेसा आहे.

■■

2. गणिती युक्तिवाद

तर्कशक्ती -

पूर्वी शालेय गणिताच्या पुस्तकाचे नाव होते 'व्यावहारिक अंकगणित'. गणित शिकलेल्या मुलाला आकडेमोड करता यावी, नफा-तोटा, टक्केवारी, व्याज या गोष्टी समजाव्या, जमाखर्चाच्या वह्या लिहिता याव्या अशी अपेक्षा असे. गणित येणे म्हणजे मुख्यत: आकडेमोड करता येणे असा समज होता.

गणित शिकल्यावर हे सगळे यावे हे खरे; पण पटापट आकडेमोड करता येणे म्हणजे गणित येणे नव्हे.

मुलांच्या तर्कशक्तीचा विकास व्हावा, त्यांना तार्किक युक्तिवाद समजावा, आणि तो करण्याची क्षमता निर्माण व्हावी, हा गणितशिक्षणाचा मुख्य उद्देश आहे. इतर गोष्टी आनुषंगिक आहेत.

भूमितीविषयात प्रमेय सिद्ध कसे करावे, हे शिकवले जाते. 'बिगरी ते मॅट्रिक' हा पु.ल.देशपांडे यांचा एक गाजलेला लेख आहे. त्यात ते लिहितात, ''त्रिकोणाच्या दोन बाजूंची बेरीज तिसऱ्या बाजूपेक्षा मोठी असते. असेल, आम्ही कुठे नाही म्हणतोय ? पण त्याची सिद्धता आम्ही पाठ कशाला करायची ?''

प्रमेयाची सिद्धता पाठ करू नये हे खरे. शालेय पातळीवर अशी सिद्धता लिहायलाही लावू नये. पण अशी सिद्धता म्हणजे तार्किक युक्तिवाद असतो. तो समजून घेतल्यास तर्कशुद्ध विचारसरणीचा विकास होतो. एखादी गोष्ट तर्काने सिद्ध झाली तरच ती खरी मानायची अन्यथा नाही हा विचार वाढीला लागतो. गणित शिक्षणाचा हेतू हाच आहे. गणित हे तर्कशास्त्रच आहे.

कोणतेही गणित सोडवताना त्यामागचा गणिती विचार महत्त्वाचा असतो. सरळ सरळ आकडेमोडीचे (खालील बेरीज करा, गुणाकार करा इ.) असले तर ते यांत्रिक पद्धतीने केले जाते. तरीसुद्धा त्या क्रियेची, त्यामागच्या गणिती विचाराची पूर्ण समज असल्यास ती आकडेमोड अधिक चांगल्या आणि सोप्या रीतीने करता येते.

विद्यार्थ्यांची खरी अडचण गणितावरील भाषिक प्रश्नांविषयी असते. केवळ शालेय स्तरावरच नव्हे तर, पुढे महाविद्यालयीन विद्यार्थ्यांनासुद्धा भाषिक प्रश्न सोडवणे

अवघड जाते. या अडचणीचे मुख्यतः दोन भाग असतात. एक म्हणजे त्या प्रश्नाचा शाब्दिक अर्थ समजून दिलेल्या गोष्टींचे परस्परांशी काय संबंध आहेत याचे आकलन होणे. दुसरा भाग म्हणजे हे आकलन झाल्यावर त्यावर तर्कशुद्ध विचार करता येणे; प्रसंगी बीजगणिती समीकरणे मांडून ती सोडवता येणे व येणाऱ्या उत्तराचा अर्थ समजणे. दिलेला प्रश्न सुस्पष्ट, आणि निःसंदिग्ध आहे; शब्द सोपे आहेत, वाक्य - रचना सरळ आहे हे सर्व इथे गृहीत धरले आहे. आता त्या प्रश्नावर तर्कशुद्ध गणिती युक्तिवाद करून तो कसा सोडवावा, याविषयी काही दिशा दाखविण्याचा प्रयत्न पुढील प्रश्नोत्तरांत केला आहे. हा युक्तिवाद ''आपुलाची वाद आपणाशी ।'' याप्रमाणे स्वतःशीच करायचा आहे.

अर्थात काही मुलांनी एकत्र येऊन अशा गणिती प्रश्नांवर विचार केला, चर्चा केली तर चांगलेच. पण परीक्षेच्या वेळी मात्र सर्व विचार स्वतःशीच करावा लागतो.

■■

> ***T**raining implies that work shall become mechanical.*
>
> ***T**eaching involves preventing mechanicalness from reaching a degree fatal to progress.*

3. काही प्रश्नोत्तरे

प्रश्न 1 : एक दुचाकीस्वार पहिले 30 कि.मी. अंतर ताशी 15 कि.मी. वेगाने गेला, पुढचे 30 कि.मी. ताशी 10 कि.मी. वेगाने गेला. आणि शेवटचे 30 कि.मी. अंतर ताशी 6 कि.मी. वेगाने गेला. तर या 10 कि.मी. अंतरासाठी त्याचा सरासरी वेग किती पडला ?

उत्तर : ''इथे दिलेल्या तीन वेगांची सरासरी काढली तर ? नाहीतरी प्रत्येक अंतर सारखेच आहे.'' असा युक्तिवाद केला तर तो गणिती विचारसरणीला धरून होणार नाही. गणिती विचार मूलभूत असला पाहिजे.

''सरासरी वेग म्हणजे काय ?''

''एकूण अंतर भागिले त्या अंतरासाठी लागलेला वेळ.''

एकूण अंतर नव्वद (90) किलोमीटर.

त्यासाठी (2 + 3 + 5) = 10 तास वेळ लागला.

म्हणून सरासरी वेग ताशी नऊ (9) किलोमीटर.

हा विचार चूक असूच शकत नाही. कारण तो मूलभूत आहे.

प्रश्न 2 : विमानाचा वेग ताशी 800 कि.मी. आहे तर अठरा (18) सेकंदात ते किती अंतर जाईल ?

उत्तर : या प्रश्नात वेळ 18 सेकंद का ? 20 किंवा 25 सेकंद का नाही ? विचार करता लक्षात येते की एका तासात 36 शे सेकंद असतात. त्या 36 ला अठराने भाग जातो. त्याचा इथे संबंध असावा.

आता 3600 सेकंदात 800 कि.मी.
म्हणून 36 सेकंदात 8 कि.मी.
म्हणून 18 सेकंदात 4 कि.मी.अंतर जाईल.

प्रश्न 3 : एका संख्येला 87 ने भागल्यास भागाकार 81 येतो. बाकी 84 उरते. त्याच संख्येला 81 ने भागल्यास भागाकार किती येईल ? बाकी किती उरेल ?

उत्तर : भागाकाराच्या गणितात भाज्य (ज्या संख्येला भागायचे ती); भाजक (ज्या संख्येने भागायचे ती); भागाकार आणि बाकी अशा चार संख्या असतात. त्यात भाज्यसंख्या सर्वात मोठी असते. भाजक आणि भागाकार यांचा गुणाकार करून त्यांत बाकी मिळवली असता भाज्य संख्या येते. याविषयी एक आर्या आहे ती अशी :

(भाजक भागाकारां गुणोनी बाकी तयात मिळवावी ।
येईल भाज्य तयाने आर्या ध्यानात नित्य ठेवावी ।।)

गुणाकार क्रिया क्रमनिरपेक्ष असल्याने (a x b = b x a) भाजक आणि भागाकार यांची अदलाबदल करता येते. बाकी तीच रहाते.

दिलेल्या प्रश्नात भाज्य संख्येला 81 ने भागल्यास भागाकार 87 येईल. बाकी 84 उरेल. ही बाकी आता भाजकापेक्षा मोठी असल्याने भागाकार आणखी 1 ने वाढेल आणि बाकी (84 - 81) = 3 उरेल.

भागाकार (87 + 1) = 88; बाकी 3.

प्रश्न 4 : लागोपाठच्या क्रमागत दोन नैसर्गिक संख्यांचा गुणाकार 1892 आहे. तर त्या दोन संख्या कोणत्या ?

उत्तर : हा प्रश्न 1892 च्या गुणक जोड्या शोधून सोडवता येईल. पुढील गणिती विचार पहा.

40 x 40 = 1600 म्हणून लहान संख्या 40 पेक्षा मोठी

50 x 50 = 2500 म्हणून लहान संख्या 50 पेक्षा लहान

म्हणून संख्यांच्या संभाव्य जोड्या.

41 x 42; 42 x 43; 43 x 44; ....48 x 49.

गुणाकार संख्या 1892. तिचे निरीक्षण करता दिसते की, ती 11 ने विभाज्य आहे. कारण (1 + 9) = (8 + 2) म्हणून वरीलपैकी योग्य जोडी 43 x 44. (कारण 44 x 45 चा एककांक शून्य येतो)

म्हणून इष्ट संख्या 43 आणि 44.

प्रश्न 5 : एका शाळेत इयत्ता 7 वीत मुलींचे प्रमाण त्या वर्गाच्या एकूण पटसंख्येच्या 30 टक्के आहे. मुलांची (विद्यार्थ्यांची) संख्या मुलींच्या संख्येपेक्षा 28 ने अधिक आहे. तर त्या वर्गाची एकूण पटसंख्या किती ? ('पट' संख्या म्हणजे हजेरीपटावरील मुलगे + मुली यांची एकूण संख्या.)

उत्तर : पटावरील एकूण संख्या 100 असेल तर मुली 30, मुलगे 70. म्हणजे मुलग्यांची संख्या 40 ने अधिक. यावरून मुलग्यांची संख्या 40 ने अधिक असल्यास पट संख्या 100. ती 4 ने अधिक असल्यास पटसंख्या 10. इथे ती 28 ने अधिक आहे; म्हणजे 4 च्या सातपट आहे. म्हणून पटसंख्या 10 च्या 7 पट म्हणजे 70.

दुसरी रीत - वर्गाची पटसंख्या 10 मानू. म्हणून मुली 3 व मुले 7. इथे मुलांची संख्या 4 ने जास्त. तेव्हा एकूण मुले 10 आहेत. मुलांची संख्या 28 ने जास्त. तेव्हा 4 च्या पट मुले होतील 70.

प्रश्न 6 : मुलगा जेव्हा 3 वर्षांचा होता तेव्हा वडिलांचे वय त्याच्या वयाच्या दहापट होते. आज वडिलांचे वय मुलाच्या वयाच्या दुप्पट आहे. तर मुलाचे आजचे वय किती ?

उत्तर : मुलाचे वय 3 तेव्हा वडिलांचे दहापट म्हणजे 30 वर्षे. दोघांच्या वयांतील अंतर 27 वर्षे. दोघांची वये वाढत गेली तरी हे अंतर कायम रहाणार. आज वडिलांचे वय मुलाच्या वयाच्या दुप्पट आहे.

म्हणून आज मुलाचे वय 27 वर्षे, वडिलांचे वय 54 वर्षे.

प्रश्न 7 : एक फटफटीस्वार आणि एक मोपेडस्वार 'अ' गावाहून 'ब' गावी जाण्यासाठी एकाच वेळी, एकाच मार्गाने 'अ' गावाहून निघाले. फटफटीचा वेग ताशी 65 कि.मी. तर मोपेडचा वेग ताशी 52 कि.मी.होता.

फटफटीस्वार 'ब' गावी पोहचल्यानंतर अर्ध्या तासाने मोपेडस्वार तिथे पोहोचला. तर 'अ' ते 'ब' हे अंतर किती ? (फटफटी म्हणजे मोटरसायकल)

उत्तर : अंतर = वेग x वेळ. ठराविक अंतर जाण्यासाठी जर वेग अधिक असेल तर वेळ कमी लागतो. वेग कमी असेल तर वेळ अधिक लागतो. म्हणून दिलेल्या अंतरासाठी वेग आणि वेळ हे व्यस्त प्रमाणात असतात.

म्हणून वेळांचे प्रमाण वेगांच्या प्रमाणांच्या विरुद्ध असते.

या प्रश्नात वेगांचे प्रमाण 65 : 52

म्हणून वेळांचे प्रमाण 52 : 65 म्हणजे 4 : 5

यावरून जे अंतर जाण्यास फटफटीला 4 तास लागतात त्याच अंतरासाठी मोपेडला 5 तास लागतात.

म्हणजे फटफटी 4 तास धावली तर दोन वाहनांच्या वेळांत 1 तासाचा फरक पडतो.

'अ' ते 'ब' या प्रवासात हा फरक $^1/_2$ तासाचा आहे.

म्हणून फटफटी 2 तास धावली तर मोपेड 2 $^1/_2$ तास.

म्हणून 'अ' ते 'ब' अंतर 65 x 2 = 130 किलोमीटर.

(अथवा 52 x 2 $^1/_2$ = 130 किलोमीटर)

आणखी हा एक तर्क पहा - 65 = 13 x 5, 52 = 26 x 2 म्हणजे अंतर 130 मानणे सोईचे. फटफटीला 2 तास तर मोपेडला 2 $^1/_2$ तास. म्हणजे प्रश्नातील माहितीशी हे जुळते.

प्रश्न 8 : दोन नैसर्गिक संख्यांतील अंतर (फरक) 5 आहे. त्या दोन संख्यांचा गुणाकार 4284 आहे. तर त्या संख्या कोणत्या ?

उत्तर : बीजगणिती रीतीने हा प्रश्न सोडवता येईल. पण वर्गसमीकरण लिहिल्यावर अवयव पाडताना परत असाच प्रश्न निर्माण होईल. अर्थात गुणाकाराचे अवयव पाडून अथवा 'पूर्णवर्ग' करण्याच्या पद्धतीने उत्तर मिळू शकेल.

बीजगणिती अव्यक्त वापरून समीकरण न लिहिता गणिती विचार पुढील - प्रमाणे करता येईल.

दोन संख्यांतील अंतर 5 आहे.

आता, 60 x 65 = 3900 < 4284

∴ लहान संख्या 60 पेक्षा मोठी.

65 x 70 = 4550 > 4284

∴ लहान संख्या 65 पेक्षा लहान.

∴ संभाव्य जोड्या : 61 x 66; 62 x 67; 63 x 68 आणि 64 x 69. दिलेला गुणाकार 4284. या संख्येची अंकबेरीज 18. म्हणून गुणाकार 9 ने (नवाने) विभाज्य. वरील चार संभाव्य जोड्यांत 63 x 68 या गुणाकारातच 9 हा अवयव आहे. म्हणून संख्या 63 आणि 68.

प्रश्न 9 : एका सरळ मार्गावर A आणि B ही दोन ठिकाणे आहेत. 'अ' हा A पासून B पर्यंत जाऊन परत A कडे येण्यासाठी "A' ठिकाणाहून निघाला. त्याच वेळी 'ब' हा B ते A आणि परत B या प्रवासासाठी "B' ठिकाणाहून निघाला.

त्या दोघांची प्रथम गाठ पडली तेव्हा ते "A' ठिकाणापासून 160 मीटर अंतरावर होते. परतीच्या प्रवासात त्यांची पुन्हा गाठ पडली ती "B' ठिकाणापासून 50 मीटर अंतरावर. तर A ते B हे अंतर किती ?

उत्तर : हा प्रश्न केवळ बीजगणिती पद्धतीने सोडविण्याचा प्रयत्न केल्यास समीकरणांच्या जंजाळातून बाहेर पडणे बिकट होईल. प्रश्न थोडा अवघड म्हणजे कोड्यासारखा आहे. योग्य दिशेने गणिती विचार केल्यास तो सुटू शकेल.

समजा A ते B हे अंतर x मीटर आहे. (इथे x हे अव्यक्त लेखनाच्या सोयीसाठी मानले. समीकरण लिहिण्यासाठी नव्हे). आता 'अ' आणि 'ब' यांच्या प्रवासाचे चित्र डोळ्यांपुढे आणा. आवश्यकता वाटल्यास आकृती काढा.

जेव्हा 'अ' आणि 'ब' यांची पहिली भेट झाली तेव्हा ते दोघे मिळून x अंतर चालले. तेवढ्या वेळात 'अ' 160 मीटर चालला. यावरून जेवढ्या वेळात दोघांचे मिळून अंतर x मीटर तेवढ्या वेळात 'अ' ची चाल 160 मीटर.

आता 'अ' B पर्यंत गेला. 'ब' A ठिकाणापर्यंत आला. म्हणजे दोघे मिळून 2x अंतर चालले. परतीच्या प्रवासात गाठ पडली तोवर दोघे मिळून आणखी 'x' मीटर चालले. याप्रमाणे दुसऱ्या भेटीपर्यंत दोघे मिळून एकूण '3x' मीटर अंतर चालले. तेवढ्या वेळात 'अ' 160 x 3 = 480 मीटर अंतर चालला असला पाहिजे. आता तो A ते B अंतर जाऊन परतीच्या मार्गावर "B' पासून 50 मीटरवर आहे. हे सर्व अंतर 480 मीटर.

म्हणून A ते B हे अंतर (480 - 50) = 430 मीटर आहे.

प्रश्न 10 : एका क्रिकेटपटूची 13 डावांतील सरासरी 49 धावा होती. चौदावा डाव खेळल्यानंतर त्याची सरासरी 53 धावा झाली. चौदापैकी एकाही डावात तो नाबाद राहिला नाही. तर चौदाव्या डावात त्याने किती धावा काढल्या ?

उत्तर : हा प्रश्न तसा तोंडीच सोडवता येईल. 13 x 49 **तसेच** 14 x 53 हे गुणाकार करण्याची आवश्यकता नाही.

तेरा डावांतील सरासरी 49 धावा. आता सरासरी 53 धावा. म्हणजे ती 4 धावांनी वाढली. तेरा डावांतील उणीव भरून काढण्यासाठी तेरा चोक बावन्न धावा. शिवाय चौदाव्या डावासाठी 53 धावा उरल्या.

म्हणून चौदाव्या डावात (52 + 53) = 105 धावा काढल्या.

प्रश्न 11 : शामूने 8 रुपये डझन या दराने काही पेरू खरेदी केले. ते त्याने 20 टक्के नफा घेऊन विकले. तर प्रत्येक पेरूची विक्रीची किंमत किती ?

उत्तर : वीस टक्के नफ्याने विक्री म्हणजे 100 रु . खरेदी तर 120 रु. विक्री. म्हणजे 1रु. (100 पैसे) खरेदी तर 120 पैसे विक्री.

म्हणून 8 रु. चे पेरू 8 x 120 = 960 पैशांना विकले.

म्हणून एक डझन पेरू 960 पैशांना विकले.

म्हणून एक पेरू 80 पैशांना ही विक्रीकिंमत

प्रश्न 12 : लागोपाठच्या (क्रमागत) तीन नैसर्गिक संख्यांचा गुणाकार 4896 आहे. तर त्या तीन संख्या कोणत्या ?

उत्तर : त्या तीन संख्यांत 10 ही संख्या नाही. कारण त्यांच्या गुणाकाराचा एककांक 6 आहे.

आता 10 x 10 x 10 = 1000 < 4896

म्हणून सर्व संख्या दहापेक्षा मोठ्या

तसेच 20 x 20 x 20 = 8000 > 4896

म्हणून सर्व संख्या वीसपेक्षा लहान.

त्या तीन संख्यांत 15 ही संख्या नाही. कारण गुणाकाराचा एककांक 6.

म्हणून संभाव्य त्रिकुटे (11 x 12 x 13, 12 x 13 x 14
16 x 17 x 18, 17 x 18 x 19)

यातील दुसऱ्या आणि चौथ्या त्रिकुटाच्या गुणाकाराचा एककांक 4 येतो. म्हणून संख्या

11 x 12 x 13 किंवा 16 x 17 x 18

पण दिलेला गुणाकार 11 ने विभाज्य नाही.

(कारण (4 + 9) = 13; (8 + 6) = 14)

म्हणून योग्य त्रिकूट 16 x 17 x 18

यावरून तीन इष्ट संख्या 16, 17, 18

प्रश्न 13 : एक वर्तुळाकार धावपट्टी आहे. त्या धावपट्टीवरून एक फेरी पूर्ण करण्यास 'अ' ला दीड मिनिट लागते. या धावपट्टीवरील "p' या ठिकाणापासून एकाच वेळी परंतु विरुद्ध दिशांनी 'अ' आणि 'ब' या दोघांनी धावायला सुरूवात केली. चाळीस (40) सेकंदांनंतर त्यांची गाठ पडली. तर त्या धावपट्टीवरून एक फेरी पूर्ण करण्यास 'ब' ला किती वेळ लागेल ?

उत्तर : दोघांची गाठ पडेपर्यंत 'ब' जेवढे अंतर धावून आला तेवढे अंतर अजून धावल्यावर 'अ' ची फेरी पूर्ण होणार आहे. जे अंतर धावण्यास 'ब' ला 40 सेकंद लागले त्या अंतरासाठी 'अ' ला (90 - 40) = 50 सेकंद लागतील.

म्हणजे जेवढ्या अंतरासाठी 'अ' ला 50 सेकंद, तेवढ्यासाठी 'ब' ला 40 सेकंद.

म्हणून जेवढ्या अंतरासाठी 'अ' ला 5 सेकंद तेवढ्यासाठी 'ब' ला 4 सेकंद.

म्हणून जेवढ्या अंतरासाठी 'अ' ला 90 सेकंद (18 पट) तेवढ्या अंतरासाठी 'ब' ला (4 x 18) = 72 सेकंद.

पण 90 सेकंदांत 'अ' ची एक फेरी पूर्ण होते.

म्हणून 'ब' ला एका फेरीसाठी 72 सेकंद लागतील.

दुसरा एक गणिती विचार.

एकाच ठिकाणाहून पण विरुद्ध दिशांनी निघाल्यावर 40 सेकंदांनी दोघांची गाठ पडते.

म्हणून 40 सेकंदांत दोघे मिळून एका फेरीचे अंतर पूर्ण करतात.

म्हणून 360 सेकंदांत दोघे मिळून नऊ फेऱ्यांचे अंतर धावतील.

आता 360 सेकंदांत 'अ' च्या चार फेऱ्या पूर्ण होतात.

म्हणून 360 सेकंदांत 'ब' च्या (9 - 4) = 5 फेऱ्या झाल्या.

720 सेकंदात 'ब' च्या 10 फेऱ्या.

एक फेरी पूर्ण करण्यासाठी 'ब' ला 72 सेकंद लागतील.

प्रश्न 14 : एका पिशवीत काही 2 रुपयांची तर काही 5 रुपयांची अशी एकूण 16 नाणी आहेत. पिशवीतील एकूण रक्कम 65 रु. असल्यास पिशवीत 2 रु.ची नाणी किती ?

उत्तर : हा प्रश्न बीजगणिती पद्धतीने सुटू शकेल. पण अंकगणिती युक्तिवादाने तोंडी करता येईल.

एकूण 16 नाणी आहेत. ती सर्व 2 रु .ची असती तर एकूण रक्कम 32 रु .च झाली असती. पण दिलेली रक्कम 65 रुपये म्हणजे 33 रु .नी अधिक आहे.

आता 2 रू.चे एक नाणे काढून घेऊन त्याऐवजी 5 रू.चे नाणे पिशवीत टाकले तर रक्कम 3 रु.नी वाढेल.

याप्रमाणे 33 रू.नी वाढण्यासाठी 2 रु .ची अकरा नाणी काढून त्याऐवजी 5 रु. ची 11 नाणी पिशवीत टाकावी लागतील.
म्हणून पिशवीत 5 रू.ची नाणी अकरा.
म्हणून पिशवीत 2 रू.ची नाणी पाच.

प्रश्न 15 : 'अ' आणि 'ब' या दोन संख्या आहेत.
संख्या 'अ' = 10 चे दशममूळ
संख्या 'ब' = 2 चे घनमूळ.
तर संख्या 'अ' मोठी की 'ब' मोठी ?
दुसऱ्या शब्दांत विचारायचे तर 10 चे दशममूळ मोठे की 2 चे घनमूळ ?

उत्तर : 'अ' चा दहावा घात : 10
'ब' चा घन (3 रा घात) : 2
तुलना करण्यासाठी दोन्ही संख्याचा समान घात करावा लागेल. तो कोणता करावा ?

दहा आणि तीन चा म.सा.वि. 30. म्हणून 30 वा घात करावा

$\therefore$ 'अ' चा 30 वा घात = 10 चा तिसरा घात (घन) = 1000

'ब' चा 30 वा घात = 2 चा दहावा घात = 1024

(बे दुणे चार दुणे आठ दुणे सोळा...असे करीत 2 चा दहावा घात तोंडी करता येतो).

आता 'अ' चा तिसावा घात = 1000

'ब' चा तिसावा घात = 1024

'ब' ही संख्या 'अ' संख्येपेक्षा मोठी.

म्हणून दोनाचे घनमूळ हे दहाच्या दशममूळापेक्षा मोठे.

प्रश्न 16 : ग्रामपंचायत समितीच्या निवडणुकीत एका पदासाठी दोनच उमेदवार उभे होते. विजयी उमेदवाराला पराभूत उमेदवाराच्या दीडपट ($3/2$ पट) मते मिळाली. त्याचे मताधिक्य 300 मतांचे असल्यास एकूण वैध मते किती ?

उत्तर : मताधिक्य म्हणजे मतांचे आधिक्य. 'आधिक्य' म्हणजे अधिकपणा. याचा अर्थ विजयी उमेदवाराला पराभूतापेक्षा 300 मते अधिक मिळाली.

आता पराभूताला जर 100 मते तर विजयी उमेदवाराला त्याच्या दीडपट म्हणजे 150 मते. मताधिक्य 50.

पण प्रत्यक्ष मताधिक्य 300 म्हणजे 50 च्या 6 पट.
म्हणून पराभूत उमेदवाराला 100 x 6 = 600 मते.
विजयी उमेदवाराला 900 मते.
एकूण वैध मतदान (600 + 900) = 1500

दुसरी रीत - विजयी उमेदवाराला 3 तर पराभूताला 2 मते असणार. म्हणजे एकूण मते 5. जर 1 चे आधिक्य तर 500 मते एकूण, तर 300 आधिक्य असल्यास 1500 मते एकूण.

प्रश्न 17 : अ, ब आणि क असे तीन दुचाकीस्वार 'म' गावाहून 'न' गावाला जाण्यासाठी एकाच वेळी एकाच रस्त्याने 'म' पासून निघाले.

'अ' चा वेग ताशी 10 कि.मी. होता. तो 'न' गावाला दुपारी 1 वाजता पोहोचला. 'ब' त्या गावी दुपारी बारा वाजता पोहोचला. 'क' चा वेग ताशी 15 कि.मी. होता. तो 'न' गावी सकाळी 11 वाजता पोहोचला. तर 'ब' चा वेग किती ? ते तिघे सकाळी किती वाजता 'म' गावाहून निघाले ?

उत्तर : 'क' 11 वाजता पोहोचला तर 'अ' 1 वाजता. म्हणजे दोघांच्या प्रवासाच्या वेळांत 2 तासांचा फरक पडला. समजा 'म' ते 'न' अंतर 15 कि.मी. असते तर 'क' ला 1 तास आणि 'अ' ला $1\ ^1/_2$ तास लागला असता फरक $^1/_2$ तासाचा पडला असता.

प्रत्यक्ष फरक 2 तासांचा म्हणजे 1/2 च्या चौपट 'म' ते 'न' अंतर 15 x 4 = 60 कि.मी.

'क' ने 4 तास (60 ÷15) प्रवास केला. तो 11 वाजता पोहोचला. म्हणून सकाळी 7 वाजता निघाला. ते तिघेही जण एकाच वेळी म्हणजे सकाळी 7 वाजता निघाले. 'ब' बारा वाजता पोहोचला. त्याचा प्रवास 5 तास.

म्हणून 'ब' चा वेग (60÷ 5) = 12 कि.मी.ताशी.

प्रश्न 18 : ठरावीक लांबीचा रस्ता करण्याचे एक काम 50 दिवसांत संपवायचे होते. त्यासाठी ठेकेदाराने काही मजूर कामावर लावले. त्यांनी प्रति दिवशी साडेसात ($7\ ^1/_2$) तास याप्रमाणे 40 दिवस काम केले तेव्हा $^2/_3$ काम संपले.

काम वेळेत पूर्ण करण्यासाठी ठेकेदाराने आणखी 15 मजूर घेतले. आता सर्व मजुरांनी प्रतिदिवशी 10 (दहा) तास काम करून सगळे काम ठरलेल्या कालावधीत (50 दिवसांत) पूर्ण केले. तर या कामावर प्रारंभी किती मजूर घेतले होते ?

उत्तर : हा प्रश्न तसा अवघड आहे. बीजगणिती पद्धतीने सोडवता येईल. पण योग्य समीकरणे मांडून ती सोडवण्यास वेळ लागेल. यावर गणिती विचार केल्यास अंकगणिती युक्तिवादाने हा प्रश्न तोंडी सोडवणे अशक्य नाही.

मजुरांचा पहिल्या गटाने दिवशी $7\ ^1/_2$ तास याप्रमाणे 40 दिवसांत एकूण ($40 \times 7\ ^1/_2$) = 300 तास काम केले.

समजा, त्या 300 तासांत 600 मीटर लांबीचा रस्ता केला.

म्हणजे पहिल्या गटाने एका तासात 2 मीटर रस्ता केला.

आता 600 मीटर हे $^2/_3$ काम.

म्हणून उरलेले $^1/_3$ काम म्हणजे 300 मीटर लांबीचा रस्ता.

हे काम दिवशी 10 तास याप्रमाणे 10 दिवसांत झाले.

म्हणजे 100 (शंभर) तासात झाले. म्हणजे ताशी 3 मीटर रस्ता

म्हणजे (पहिला गट + 15) एवढे मजूर 1 तासात 3 मीटर रस्ता करतात.

पहिला गट ताशी 2 मीटर काम करतो. म्हणून (पहिला गट + 15) एवढे मजूर पहिल्या गटाच्या $1\ ^1/_2$ पट (म्हणजे 3 मीटर) काम करतात.

म्हणून (पहिला गट + 15) ही संख्या पहिल्या गटाच्या $1\ ^1/_2$ पट आहे.

म्हणून 15 ही संख्या पहिल्या गटाच्या निमपट म्हणजे $^1/_2$ आहे. यावरून पहिल्या गटातील मजुरांची संख्या 30

म्हणून प्रारंभी 30 मजूर कामावर घेतले होते.

प्रश्न 19 : एक काम 'अ' आणि 'ब' मिळून 12 (बारा) दिवसांत पूर्ण करतात. 'ब' आणि 'क' मिळून तेच काम 20 दिवसांत संपवतात, तर 'क' आणि 'अ' या दोघांना 10 दिवस लागतात. तर एकटा 'ब' ते काम किती दिवसांत पूर्ण करील ?

उत्तर : येथे नेहमीची रीत वापरली तर अपूर्णांक संख्यांवर गणिती क्रिया कराव्या लागतात. ते टाळण्यासाठी पुढील पद्धत पहा. 12 दिवस, 20 दिवस आणि 10 दिवस यांचा ल.सा.वि = 60

म्हणून 'एक काम' म्हणजे 60 वस्तू बनविणे. 60 मीटर रस्ता करणे. 60 खड्डे खणणे असे काहीतरी मानावे.

समजा, 600 झाडे लावणे हे 'एक काम' आहे.

'अ' आणि 'ब' 12 दिवसांत करतात यावरून एका दिवसात

'अ' आणि 'ब' 50 झाडे .... (i)

'ब' आणि 'क' 30 झाडे .... (ii)

तर 'क' आणि 'अ' 60 झाडे लावतात .... (iii)

पहिल्या दोन विधानांवर विचार केला तर 'अ' हा 'क' पेक्षा 20 झाडे अधिक लावतो असे दिसते.

आता 'अ' आणि 'क' 60 झाडे लावतात. त्यातील 'अ' ची अधिक असलेली 20 बाजूला केली तर उर्वरित 40 समसमान.

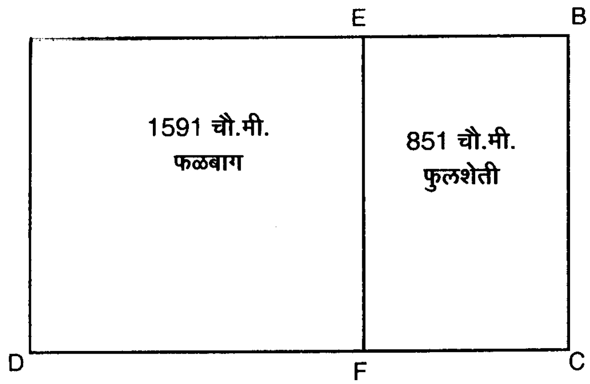
यावरून 'अ' एका दिवसात (20 + 20) = 40 झाडे
तर 'क' 20 झाडे लावतो.

आता विधान (i) तसेच (ii) वरून 'ब' एका दिवसात 10 झाडे लावतो हे स्पष्ट आहे.

म्हणून एकट्या 'ब' ला 600 झाडे लावण्यासाठी म्हणजे 'एक काम' करण्यासाठी 60 दिवस लागतील.

प्रश्न 20 : एका आयताकृती शेतात रुंदीला समांतर असा बांध घालून त्याचे दोन भाग केले आहेत.

एका भागाचे क्षेत्र 1591 चौ.मी.असून दुसऱ्याचे 851 चौ.मी.आहे. दोन्ही आयतांच्या लांबी रुंदीची मापे पूर्ण मीटरमध्येच आहेत. तर ती मापे किती ?



उत्तर : क्षेत्रफळ = लांबी गुणिले रुंदी. म्हणून 1591 आणि 851 या गुणाकारांत एक गुणक (रुंदीचे माप) समाईक आहे. तो चटकन सापडत नाही. या क्षेत्रफळांची बेरीज केली तर पूर्ण आयताचे क्षेत्रफळ मिळेल. त्यात तो गुणक असेलच

आता 1591 + 851 = 2442 = 2 x 3 x 11 x 37.

दिलेली क्षेत्रफळे 2,3 तसेच 11 ने विभाज्य नाहीत.

म्हणून रुंदी 37 मीटर असली पाहिजे.

यांवरून फळबाग 15 वा = 37 x 43

फूलशेती 851 = 37 x 23

म्हणून आयताची मापे 66 मी x 37 मी.

(दोन गुणाकारांची वजाबाकी केली तरी त्या संख्येत समाईक गुणक असणारच. त्या पद्धतीने करून पहा. दोन गुणाकारांची बेरीज म्हणजे पूर्ण आयताचे (ABCD) क्षेत्रफळ. त्यांची वजाबाकी म्हणजे काय याचा विचार करा.)

प्रश्न.21 : एका कुक्कुटपालन केंद्राच्या व्यवस्थापकाने सांगितले, ''सरासरीच्या भाषेत बोलायचे तर या केंद्रातील दीड कोंबडी दीड दिवसात दीड अंडे देते. या प्रमाणे आमच्या केंद्राचे प्रतिदिनी उत्पादन वीस डझन अंडी इतके आहे.'' तर या केंद्रात किती पक्षी (कोंबड्या) आहेत ?

उत्तर : दीड कोंबडी $1^1/_2$ दिवसात $1^1/_2$ देते.

∴ तीन कोंबड्या $1^1/_2$ दिवसात 3 अंडी

∴ तीन कोंबड्या 3 दिवसात 6 अंडी

∴ तीन कोंबड्या 1 दिवसात 2 अंडी

∴ एका दिवसात 2 अंडी मिळण्यासाठी 3 कोंबड्या

∴ एका दिवसात 20 अंडी मिळण्याची 30 कोंबड्या

∴ एका दिवसात 20 डझन अंड्यासाठी 30 डझन = 360 कोंबड्या

∴ त्या कुक्कटपालन केंद्रात 360 पक्षी आहेत.

प्रश्न 22 : एका रिकामा हौद A तोटीने $2\ ^1/_2$ तासांत भरतो तर 'B' तोटीने 6 तासांत भरतो. हौद पूर्ण रिकामा असताना सकाळी 7 वाजता दोन्ही तोट्या चालू केल्या. काही वेळानंतर 'A' तोटी बंद केली. सकाळी 9 (नऊ) वाजता हौद पूर्ण भरला तेव्हा 'B' तोटी बंद केली. तर 'A' तोटी किती वाजता बंद केली ?

उत्तर : हौद आणि तोट्या या विषयावरील प्रश्न सोडविण्यासाठी पुढील रीत अधिक सोपी आहे.

'A' तोटीला $2^1/_2$ तास लागतात.

'B' तोटीला 6 तास लागतात.

ल.सा.वि. 15

समजा, हौदाची धारकता (पाणी साठविण्याची क्षमता) 1500 लीटर आहे.

∴ 'A' तोटीने हौद $2^1/_2$ तासात $(^5/_2)$ तासांत भरतो.

∴ 'A' तोटीतून ताशी 1500 x $^2/_5$ = 600 लिटर पाणी येते.

तसेच 'B' तोटीतून ताशी (1500 ÷ 6) = 250 लिटर पाणी येते.

∴ 'B' तोटी सकाळी 7 ते 9 अशी दोन तास चालू होती.

∴ 'B' तोटीतून आलेले पाणी : 250 x 2 = 500 लिटर

∴ उरलेले (1500 - 500) = 1000 लिटर पाणी "A' तोटीतून आले.

त्यासाठी लागलेला वेळ = (1000 / 600) = 100 / 60 तास

= 100 मिनिटे = 1 तास 40 मिनिटे

∴ 'A' तोटी (7 + 1 तास 40 मिनिटें) = 8 वाजून 40 मिनिटांनी बंद केली.

प्रश्न 23 : 'A' एक काम नऊ दिवसांत पूर्ण करतो. 'B' तेच काम बारा दिवसांत करतो. त्या दोघांनी मिळून ते काम करण्यास प्रारंभ केला. तीन दिवसांनंतर 'A' ते काम सोडून गेला. तर उरलेले काम पूर्ण करण्यास 'B' ला आणखी किती दिवस लागतील ?

उत्तर : एका कामासाठी 'A' ला 9 दिवस लागतात. 'B' ला 12 दिवस. ल.सा.वि. 36.

समजा, 'एक काम' म्हणजे 36 वस्तू तयार करणे.

∴ 'A' एका दिवसांत 4 वस्तू तर 'B' 3 वस्तू निर्माण करतो.

दोघे मिळून 7 वस्तू.

आता उर्वरित प्रश्न सोडवा.

(उत्तर : 5 दिवस)

प्रश्न 24 : दहा घोडे दहा दिवसांत दहा किलो पेंड खातात. तर सहा घोडे सहा दिवसांत किती किलो पेंड खातील ?

उत्तर : याचे उत्तर "6 किलो' असे दिले तर तो अविचार ठरले. घोडे कमी झाले म्हणून पेंड कमी लागेल. (समप्रमाण)

दिवस कमी म्हणूनही पेंड कमी (सम प्रमाण)

∴ घोडे दिवस पेंड

$$\frac{(6)}{10} \times \frac{(6)}{10} \times 10 = 3.6 \text{ किलो ग्रॅम}$$

∴ सहा घोडे सहा दिवसांत 3.6 किलो पेंड खातील.

प्रश्न 25 : दहा किलो पेंड दहा घोड्यांना दहा दिवस पुरते. तर सहा किलो पेंड सहा घोड्यांना किती दिवस पुरेल ?

उत्तर : पेंड कमी झाली म्हणून दिवस कमी होतील (सम प्रमाण)

घोडे कमी झाले म्हणून दिवस वाढतील. (व्यस्त प्रमाण)

पेंड घोडे दिवस

$$\frac{(6)}{10} \times \frac{(6)}{6} \times 10 = 10$$

∴ सहा किलो पेंड सहा घोड्यांना दहा (10) दिवस पुरेल.

प्रश्न 26 : एक काम एकटा 'अ' 24 दिवसांत पूर्ण करतो. 'ब' 40 दिवसांत तर 'क' 10 दिवसांत करतो.

तेच काम ते तिघे मिळून करू लागले तर परस्परसहकार्यामुळे प्रतिदिनी 20 टक्के काम अधिक होते. तर ते तिघे मिळून ते काम किती दिवसांत पूर्ण करतील ?

उत्तर : एकट्या 'अ' ला 24 दिवस लागतात

'ब' ला 40 दिवस

तर 'क' ला 10 दिवस

ल.सा.वि. 120

समजा 'एक काम' म्हणजे 120 वस्तू निर्माण करणे.

∴ 'अ' दिवशी (120/24) = 5 वस्तू करतो.

'ब' दिवशी (120/40) = 3 वस्तू.

तर 'क' दिवशी (120/10) = 12 वस्तू बनवतो.

∴ तिघांचे एका दिवसाचे काम = (5 + 3 + 12) = 20 वस्तू

सहकार्यामुळे वाढ 20 टक्के = 20 x 0.2 = 4 वस्तू

∴ एका दिवसांत 24 वस्तूंची निर्मिती होते.

∴ 120 वस्तूंसाठी (120 / 24) = 5 दिवस लागतील.

प्रश्न 27 : अनिल आणि सुरेश नाशिकहून मुंबईला जाण्यासाठी स्वत:च्या वाहनांनी एकाच वेळी निघाले. अनिलचा वेग सुरेशच्या वेगाच्या $^4/_7$ होता. त्यामुळे अनिल हा सुरेशनंतर 3 तास 15 मिनिटांनी मुंबईला पोचला. तर सुरेशला या प्रवासास किती वेळ लागला ?

उत्तर : समान अंतर जाण्यासाठी जेवढा वेग अधिक तेवढा वेळ कमी. म्हणून वेग आणि वेळ व्यस्त प्रमाणात इथे .

वेग : 4:7 (अनिल : सुरेश)

∴ वेळ : 7:4 (अनिल : सुरेश)

म्हणजे अनिलला (7 - 4) = 3 मिनिटे अधिक लागली तर सुरेशचा प्रवास 4 मिनिटे. इथे अनिलला 195 मिनिटे अधिक लागली. यावरून सुरेशचा वेळ काढावा. [4 तास 20 मिनिटे]

प्रश्न 28 : एक रिकामा हौद 'A' तोटीने 6 तासांत भरतो तर 'B' तोटीने 4 तासांत भरतो. तोच पूर्ण भरलेला हौद 'C' तोटीने 3 तासांत रिकामा होतो.

एकदा सकाळी 7 वाजता तो हौद पूर्ण रिकामा असतो. 'A' आणि 'B' तोट्या सुरू केल्या. 'C' तोटी चुकून उघडीच राहिली. हे सकाळी 9 वाजता लक्षात आले तेव्हा 'C' तोटी बंद केली, तर .

(i) हौद किती वाजता पूर्ण भरेल ?

(ii) 'C' तोटी सकाळी 7 वाजताच बंद ठेवली असती तर हौद किती वाजता भरला असता ?

उत्तर : हौदाची क्षमता 1200 लिटर मानून प्रश्न सोडवा.
(i) 11 वाजता (ii) 9 वाजून 24 मिनिटांनी.

(टीप : 'A' आणि 'B' तोट्यांतील पाणी हौदांत वरून खाली पडते. त्या पाण्यावर हौदातील पाण्याच्या उंचीचा परिणाम होत नाही. इथे 'A' तोटीतून ताशी 200 लिटर पाणी सतत येऊ शकेल. तसेच 'B' तून 300 लिटर. मात्र 'C' तोटीतून बाहेर पडणाऱ्या पाण्याचे प्रमाण हौदातील पाण्याची उंची वाढली की वाढत जाईल. इथे 'C' तोटीतून ताशी 400 लिटर पाणी बाहेर जाते असे आपण मानणार, ते प्रश्न सोडवणुकीच्या सोईसाठी. पिण्याच्या पाण्याच्या पिंपात पाणी कमी असेल तर तोटी सोडल्यावर पेला भरायला वेळ लागतो. पिंपात पाणी खूप असेल तर पेला चटकन भरतो.)

प्रश्न 29 : या प्रश्नात अंकांऐवजी अक्षरे वापरली आहेत. **(स ब ब)** या तीन अंकी संख्येचा वर्ग **(त ब क र स)** ही पाच अंकी आहे. तर **(स ब ब)** ही तीन अंकी संख्या कोणती ? प्रत्येक अंकासाठी वेगळे अक्षर आहे.

उत्तर : प्रथम दर्शनी हा प्रश्न अवघड वाटतो. दिलेली माहिती अपुरी वाटते. आता विचार करू.

हा प्रश्न आपल्याला विचारला आहे. म्हणजे आपला आवाक्यातील असणार.



तीन अंकी संख्या नऊशे आहेत. पण वर्ग पाच अंकीच आहे. सोप्या संख्याचे पाहता 400 चा वर्ग (160000) सहा अंकी येतो म्हणजे (स ब ब) 400 पेक्षा लहान (वा ! 500 संख्या एकदम कटल्या) आता स=1 किंवा 2 किंवा 3 असू शकेल. प्रश्नात स आणखी कुठे आहे ? पूर्णवर्ग संख्येच्या (त ब क र स) एकक स्थानी. वर्ग संख्येचा एककांक 2 तसेच 3 कधीच नसतो. म्हणजे स=1, (अरे वा ! एका अक्षराची किंमत मिळाली. आता ब ची किंमत काढली की झाले.)

(ब) वर्ग च्या एकक स्थानी स म्हणजे 1 आहे.

यावरून ब=1 किंवा 9 पण स=1 म्हणून ब=9 च. (पहा म्हणता म्हणता उत्तर आलेच. लेखी आकडे मोड काहीच करावी लागली नाही).

उत्तर : (स ब ब) = 199

(आता **त ब क र स** काढता येईल. पण विचारलेलीच नाही तर कशाला काढा ?)

■■

4. सो[illegible]

(प्रश्न 1 ते 10 सोडवून दाखविलेले नाहीत. त्यांची केवळ अंतिम उत्तरे दिली आहेत.)

प्रश्न 1 : एका कंपनीने आपल्या साबणाची किंमत 20 टक्के वाढविली. त्यामुळे साबणाची विक्री 20 टक्क्यांनी घटली. तर या उत्पादनाच्या एकूण विक्री - रकमेत किती टक्के फरक पडला ?

(उत्तर : 4 % घट झाली.)

प्रश्न 2 : 'अ' आणि 'ब' हे सकाळी 7 वाजता म गावाहून न गावला जायला एकाच ठिकाणाहून एकाच मार्गाने निघाले. 'ब' च्या वाहनाचा वेग 'अ' च्या वाहनाच्या दीडपट होता. 'ब' सकाळी 7 वाजून 40 मिनिटांनी म गावला पोहोचला. तर 'अ' तिथे किती वाजता पोहोचला ?

(उत्तर : सकाळी 8 वाजता)

प्रश्न 3 : एका दुकानदाराने 'गणिती गमती' या पुस्तकाच्या 20 प्रती विकल्यावर 26 प्रतींच्या खरेदीची किंमत भरून निघाली. तर त्याने किती टक्के नफ्याने पुस्तके विकली ?

(उत्तर : 30%)

प्रश्न 4 : एका गोशाळेत काही सुर्ती तर काही जर्सी अशा एकूण 29 गाई आहेत. प्रतिदिनी प्रत्येक सुर्ती गाय 14 लिटर दूध देते तर जर्सी गाय 11 लिटर. गोशाळेचे दुग्धोत्पादन दिवशी 370 लिटर आहे. तर प्रत्येक प्रकारच्या गाई किती ?

(उत्तर : सुर्ती गाई 17, जर्सी 12)

प्रश्न 5 : बारा खेळाडूंच्या संघातील 61 किलोग्रॅम वजनाचा एक खेळाडू जाऊन त्याच्या जागी दुसरा खेळाडू आला. त्यामुळे या बारा खेळाडूंच्या वजनाची सरासरी पूर्वीपेक्षा 1 किलोग्रॅमने वाढली. तर त्या दुसऱ्या खेळाडूचे वजन किती ?

(उत्तर :73 किलो.)

प्रश्न 6 : एका वर्तुळाकार धावपट्टीवरून एक फेरी पूर्ण करण्यास 'अ' ला 2 मिनिटे तर 'ब' ला 80 सेकंद एवढा वेळ लागतो. त्या दोघांनी धावपट्टीवरील 'प' या बिंदूवरून एकाच वेळी पण विरुध्द बाजूंनी धावण्यास प्रारंभ केला. तर कमीत कमी किती सेकंदानी :

(i) त्या दोघांची गाठ पडेल ?

(ii) त्या दोघांची गाठ प्रारंभीच्या 'प' या ठिकाणी पडेल ?

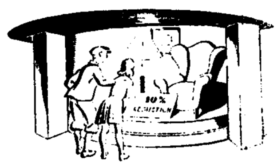
(उत्तर : (i) 48 सेकंद (ii) 240 सेकंद)

प्रश्न 7 : पुढील गुणाकारात गुण्य तीनअंकी, गुणक दोनअंकी तर गुणाकार पाच अंकी आहे. तर फुल्यांच्या जागी असलेले अंक कोणते ?

```
   ★ 6 7
     ★ ★
---------
  2 6 ★ 1
★ ★ ★ 8 0
---------
★ ★ ★ ★ 1
```

(उत्तर : 867 x 43 = 37,281)

प्रश्न 8 : वस्तूच्या किंमतीत वाढ झाल्याने जेवढ्या रकमेत पूर्वी एक डझन वस्तू मिळत, तेवढ्या रकमेत आता 8 च वस्तू मिळतात. तर शेकडा दरवाढ किती झाली ?



(उत्तर: 50 %)

प्रश्न 9 : दहा किलो पेंड दहा दिवसांत संपवायला 10 घोडे लागतात तर सहा किलो पेंड सहा दिवसांत संपवायला किती घोडे हवेत ?

(उत्तर : 10 घोडे)

प्रश्न 10: पुढील बेरजेत अंकांऐवजी अक्षरे वापरली आहेत. प्रत्येक अंकासाठी वेगळे अक्षर आहे. (एक अंक-एक अक्षर)

पाच अंकी संख्या (ज ज प थ ज). त्या संख्येत (म न त प) ही चार अंकी मिळवली. बेरीज सहा अंका संख्या (म न न त म म) तर या संख्या (अंकांत) कोणत्या ?

```
    ज   ज   प   थ   ज
+       म   न   त   प
---------------------
म   न   त   म   म
```

(टीप : दोन संख्यांची बेरीज करताना जर हातचा आला तर तो एक (1) असतो. अन्य कोणतीही संख्या असू शकत नाही.)

(उत्तर : ज = 9, प = 2, थ = 7, म = 1, न = 0, त = 3)

■■

[illegible]

प्रश्न.1 : असे गणिती प्रश्न बीजगणिती रीतीने सोडवू नयेत काय ?

उत्तर : प्रश्न वाचल्यावर जी रीत पटकन सुचेल ती वापरावी. परीक्षेच्या वेळी पर्यायी रीतीचा विचार करायला वेळच नसतो. खरे तर गणिती प्रश्न अमुक एका पद्धतीनेच सोडवा अशी अट नसावी. कोणतीही रीत चालेल. त्यामागचा गणिती विचार योग्य दिशेने जाणारा असला म्हणजे झाले.

प्रश्न.2 : अशा पध्दतीने केवळ गणिती युक्तिवाद करून प्रश्न सोडवले तर परीक्षेत गुण मिळतील का ?

उत्तर : मिळायला हवेत. खरे तर अशा पद्धतीने गणित सोडवणाऱ्या मुलाला विशेष शाबासकी द्यायला हवी. मूल्यमापन करायचे ते योग्य दिशेने केलेल्या गणिती तर्काचे. विशिष्ट रीत आणि पायऱ्या महत्त्वाच्या नाहीत. अंतिम सांख्यिक (numerical) उत्तरालाही अवास्तव महत्त्व नसावे. मात्र मुलांनी आकडेमोडीच्या अचूकतेविषयी दक्षता घ्यावीच.

प्रश्न.3 : बीजगणिताचा अवलंब न करता सगळेच भाषिक प्रश्न अंकगणिती युक्तिवादाने सोडवता येतील का ?

उत्तर : नाही येणार. अनेक प्रश्न असे असतात की ते सोडविण्यासाठी बीजगणिती समीकरणे लिहावीच लागतात. अंकगणिती पद्धतीने काही प्रश्न चटकन सुटत असले तरी अंकगणिताचे क्षेत्र मर्यादित आहे. बीजगणिताचे अधिक व्यापक आणि विशाल आहे. मात्र समीकरण लिहिताना जो गणिती तर्क करावा लागतो, तोच महत्त्वाचा.

प्रश्न.4 : कोणत्या प्रकारची गणिते केवळ अंकगणिती विचाराने सुटतील ?

उत्तर : नफा तोटा, गुणोत्तर प्रमाण, शतमान (शेकडेवारी), काळ-काम ते वेग-वेळ-अंतर या भागांवर आधारलेले बहुतेक प्रश्न अंकगणिताने चटकन सुटतात. त्याकरिता दिलेल्या प्रश्नाचे पूर्ण आकलन होणे, त्रैराशिक मांडता येणे, सम-व्यस्त प्रमाणाची चांगली समज असणे आवश्यक आहे. बहुतेक प्रश्नांत आकडेमोड तोंडी करता यावी इतकी सोपी असते. (ती तशी असावीच. कारण इथे कसोटी आहे ती गणिती युक्तिवादाची. आकडेमोडीतील कौशल्याची नव्हे.)

प्रश्न.5 : कोणत्या प्रकारचे प्रश्न बीजगणिताशिवाय सुटत नाहीत ?

उत्तर : सर्वसाधारणपणे असे म्हणता येईल, की ज्या प्रश्नाच्या सोडवणुकीसाठी वर्गसमीकरण मांडावे लागते, असा प्रश्न अंकगणिताने सुटत नाही.

प्रश्न.6 : भूमितीतील प्रश्नांविषयी काय सांगता येईल ?

उत्तर : इथे आपण एकाच प्रश्नाचा विचार केला आहे. तो स्वतंत्र विषय आहे. प्रमेयाची सिद्धता लिहिणे अथवा त्यावर आधारित प्रश्न सोडविणे म्हणजे तार्किक युक्तिवादच असतो. इथे बीजगणिताचा उपयोग नगण्य असतो.

प्रश्न.7 : अंकगणिती पद्धतीत कोणतीही सूत्रे नसतात काय ?

उत्तर : पाठ करायला पाहिजेत अशी सूत्रे नसतात. ''सरासरी वेग बरोबर एकूण अंतर भागिले ते अंतर जाण्यासाठी लागलेला वेळ'' हे सूत्र नव्हे. ही साधी समज आहे. तसेच ''सरळ व्याज = मुद्दल भागिले 100 गुणिले दर गुणिले मुदत'' हेही सूत्र नव्हे. गणित सोडवणाऱ्याला एवढी समज असावी हे अपेक्षित आहे.

गणिते सोडविण्यासाठी अशी तयार सूत्रे देऊ नये. सूत्र पाठ केले की विचार ठप्प होतो. तर्कशक्तीचा विकास खुंटतो.

प्रश्न.8 : या पद्धतींपेक्षा आम्हाला नेहमीच्या पध्दतीने उदाहरण सोडविणे सोपे वाटते. का ?

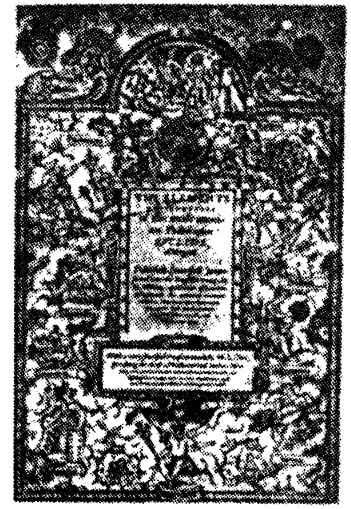
उत्तर : सुरुवातीपासूनच आपण क्रमाने सरळ विचार करण्यापेक्षा लिहिण्यावर व तयार सूत्रांवर भर देत असतो. शिवाय तुमच्या-आमच्या पद्धतीत फरक असला तरी खूपदा तर्क करण्यात फरक असतोच असे नाही. म्हणून तुमच्या पद्धतीने सोडवून खात्री पटल्यावर तुम्ही, ''असा विचार केला तर ?'' असा प्रश्न निर्माण करत चला व मुलांनाही तशी सवय लावा. सरावाने विचार करून हे जमेल.

प्रश्न.9 : पण मग अभ्यासक्रम रेंगाळेल त्याचे काय ?

उत्तर : त्या बाबतीत मी तुम्हाला काय मदत करणार ? पण प्रश्नपत्रिका काढणे, मुलांना विचार करण्याची सवय लावणे या बाबतीतील तुमचे स्वातंत्र्य तुम्ही अबाधित ठेवा. मध्यम मार्ग वापरा.

■■

6. मूळ संख्या अनंत आहेत



युक्लिड यांच्या The Elements पुस्तकाचे मुखपृष्ठ

''नैसर्गिक संख्या अनंत आहेत हे कसे सिद्ध करता येईल ?''

''त्यात सिद्ध काय करायचे ? आपल्याला दिसतेच की कितीही मोठी संख्या असली तरी तिच्यात एक (1) जरी मिळवला तरी तिच्याहून मोठी संख्या येतेच. या मोठेपणाला अंत नाही.''

''ठीक आहे. आता (2, 3, 5, 7, 11, 13...) या मूळ संख्यासंचातील घटकांची संख्या अनंत आहे हे कसे दाखवता येईल ?

''मूळ संख्या अनंत असतात हे मी वाचले आहे. पण त्याची सिद्धता मला ठाऊक नाही.''

''मूळ संख्या अनंत आहेत हे सिद्ध करायचे आहे. समजा, त्या अनंत नाहीत असे आपण गृहीत धरू. हे गृहीतक जर असत्य ठरले तर मूळ संख्या अनंत आहेत हे सिद्ध होईल.''

''हो.''

''आता मूळ संख्या अनंत नाहीत. तर जी सर्वात मोठी आहे अशी एक मूळ संख्या असली पाहिजे. (म्हणजे वरील संचाचा एक शेवटचा घटक असला पाहिजे). समजा, ती संख्या N आहे.''

''म्हणजे सर्वात मोठी मूळ संख्या N ही आहे इथपर्यंत समजले.''

''समजा 2 ते N पर्यंतच्या सर्व नैसर्गिक संख्यांचा गुणाकार केला. त्या गुणाकार संख्येला 'P' असे नाव दिले. लक्षात घ्या की 2 ते N पर्यंतची प्रत्येक संख्या 'P' चा गुणक आहे.''

''हो. म्हणजे 'P' ला या प्रत्येक संख्येने नि:शेष भाग जातो. तसेच 'P' ही संख्या N पेक्षा खूपच मोठी असणार हेही समजले.''

''छान ! पण इथे 'खूपच' या विशेषणाची आवश्यकता नाही. आतां (P + 1) या संख्येचा विचार करा. या संख्येला 2 ते N पर्यंतच्या कोणत्याही संख्येने भागले तर 1 (एक) बाकी उरेलच ना ?''

''हो. 'P' ला पूर्ण भाग जाईल. म्हणून 1 बाकी उरेल. म्हणजे (P + 1) ही संख्या. 2 ते N पर्यंतच्या प्रत्येक संख्येने अविभाज्य आहे, असेच ना ?''

''हो. आता (P + 1) ही मूळ संख्या असेल तर N ही सर्वांत मोठी मूळ संख्या आहे हे आपले गृहीतक असत्य ठरते.''

''पण (P + 1) ही मूळ संख्या नसेल तर ?''

''तर तिचे किमान दोन मूळ अवयव असले पाहिजेत. या संख्येला 2 ते N पर्यंतच्या कोणत्याच संख्येने पूर्ण भाग जात नाही हे आपण पाहिले. म्हणजे (P + 1) चा मूळ अवयव N पेक्षा मोठा असला पाहिजे. म्हणजे N पेक्षा मोठी अशी एक मूळ संख्या असली पाहिजे.''

''एक नव्हे दोन मूळ संख्या असल्या पाहिजेत. कारण (P + 1) चा प्रत्येक मूळ अवयव N पेक्षा मोठाच असणार.''

''मोठाच असणार हे खरे. पण सर्व शक्य पर्यायांचा विचार करा. N पेक्षा मोठी अशी किमान एक तरी मूळ संख्या असलीच पाहिजे हे मात्र खरे. म्हणजे ''N ही सर्वात मोठी मूळ संख्या आहे'' हे गृहीतक असत्य ठरते.



''यावरून मूळ संख्या अनंत आहेत हे सिद्ध होते.''

''हो. समजले. हा युक्तिवाद सोपा आहे. मला सहज लिहिता येईल.''

''छान. नेमक्या गणिती भाषेत लिहून काढा. त्यात अनावश्यक असा एकही शब्द असता कामा नये.''

■■

[illegible]

- आपल्या ज्ञानाचा प्रारंभ हा अनुभवातून होतो. जसा अनुभव येतो तसे ज्ञान वाढते. हे जरी खरे असले तरी गणित विषयाचे ज्ञान हे अनुभवजन्यच असते असे नाही. कोणत्याही अनुभवविना गणिती ज्ञान होऊ शकते.

....इम्यान्युएल कान्ट

- गणित हे तर्कशास्त्र आहे. तर्कशास्त्रात कोणतेही आश्चर्य असू शकत नाही.

....बर्ट्रांड रसेल

- गणित शास्त्र ही चांगली गोष्ट आहे. पण सारखा त्याचाच नाद असणे ही चांगली गोष्ट नाही.

....ऑल्डस हक्सले.

- विज्ञान आणि गणित यांच्या संदर्भात शंभर तज्ज्ञांची अधिकार वाणी (authority) ही एका व्यक्तीच्या विनम्र युक्तिवादापुढे निष्प्रभ ठरते.

- युक्लिडकडे भूमितीचे सिद्धान्त शिकण्यासाठी आलेल्या एका शिष्याने त्याला विचारले, या प्रमेयांचा अभ्यास करून मला काय आर्थिक लाभ होणार आहे ?

यावर युक्लिडने आपल्या सेवकास बोलावले आणि सांगितले, ''याला तीन पैसे दे. भूमितीच्या अभ्यासातून याला नफा कमवायचा आहे.''

■■

असे का ?

- "$(a^3 + b^3)$ चे अवयव पाडा. " याचे उत्तर बहुसंख्य विद्यार्थी अचूक लिहितात. पण $(27^3 + 23^3)$ या संख्येला जिने नि:शेष भाग जाईल अशी दोन अंकी संख्या कोणती ? या प्रश्नाचे उत्तर अनेकांना येत नाही.

  असे कां ?

- ''समभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ त्याच्या कर्णमापांच्या गुणाकाराच्या निम्मे असते''. हे विधान बहुतेक विद्यार्थ्यांना तोंडपाठ असते. पण 5 सेमी त्रिज्येच्या वर्तुळात चौरस आंतरलिखित केला तर त्याचे क्षेत्रफळ किती ? याचे उत्तर चटकन देता येत नाही.

  असे कां ?

- ''दोन ही सर्वात लहान मूळ संख्या आहे. ''

  ''दोन विषम संख्यांची बेरीज सम असते .''

  ''एक सम आणि एक विषम अशा दोन संख्यांची बेरीज विषम असते.''

  अशी सर्व विधाने विद्यार्थ्यांना मुखोद्गत असतात पण ''एक संख्येचे दोनच मूळ अवयव असून त्यांची बेरीज 175 आहे. तर ती संख्या कोणती ?'' या प्रश्नाचे उत्तर अनेकांना येत नाही.

  असे कां ?

- ''त्रिकोणाच्या एका बाजूचा मध्यबिंदू व त्या बाजूसमोरील शिरोबिंदू यांना जोडणारी रेषा म्हणजे मध्यगा' मध्यगेची ही व्याख्या मुलांना पाठ असते. पण मध्यगेवरील प्रश्नात मात्र, आकृती काढताना विद्यार्थी शिरोबिंदूतून समोरच्या बाजूवर लंब टाकतात ?

  असे कां ?

■■

यांच्या आर्थिक सहयोगामुळेच अल्प किंमतीत ही पुस्तिका आपणापर्यंत येत आहेत.

व्यक्ती

कै. श्री. पुरणमल बादामसिंह गुप्ता यांचे स्मरणार्थ
गुप्ता बंधू, वाई

डॉ. शशिकांत कात्रे, पुणे

श्री. गुलाब शेख, S.B.I. लाईफ सातारा

श्री. शौकतअलीखान मोकाशी, वाई

संस्था

दि. वाई अर्बन को-ऑप. बँक वाई

स्व. दिनेश ओसवाल स्मृती प्रतिष्ठान, वाई

वाई तालुका माध्य. शाळा शिक्षक-शिक्षकेतर कर्मचारी सह. पतसंस्था वाई

दि. जनता अर्बन को-ऑप. बँक वाई